ALGEBRE LINEAIRE *T.D. n°6*

1- Valeurs et vecteurs propres d'une matrice.Applications.

a- Calculez les valeurs propres de la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ - On rappelle que les valeurs propres λ de **A** sont données par l'équation : dét(**A**-λ **I**)**=0**

b- Calculez les vecteurs propres de **A** - Soit **V** la matrice des vecteurs propres. On détermine **V** par l'expression matricielle : (**A**-λ **I**)**V**=0 - Vérifiez que l'on peut trouver 2 vecteurs propres $V_1(1,1)$ et $V_2(4,1)$ leur matrice correspondante étant $V = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c- Diagonalisez la matrice **A** en l'exprimant dans sa base de ses vecteurs propres : $A_{diagonale}=V^{-1}\,A\,V$ – on déterminera tout d'abord V^{-1} l'inverse de V puis $A_{diagonale}$

Vérifiez bien que $A_{diagonale} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ - On rappelle que l'inverse d'une matrice **A** (carrée et régulière) est :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{{}^t(A_{ij})}{dét(A)}}$$

où ${}^t(A_{ij})$ est la matrice des cofacteurs transposée de **A**

Application : *Elévation d'une matrice à des puissances successives.*

a. Elevez $A_{diagonale}$ à la puissance **8**, par exemple. (ce qui revient à élever chaque terme de la matrice diagonale à cette puissance)

b. Revenir à l'expression de A^8 en déterminant $A^8=V\,(A_{diagonale})^8\,V^{-1}$

2 –Système linéaire de 3 équations à 3 inconnues.

On considère le système linéaire suivant :

2x+4y-z=-3 (1)
x-y-2z=-3 (2)
x+5y+3z=6 (3)

a- Mettre le système linéaire sous forme d'équation matricielle **AX**=**B** où $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

b – Calculer la matrice X solution du système, par l'expression $X= A^{-1}\,B$ et vérifiez la solution en remplaçant x, y, z par leurs valeurs dans les équations (1), (2) et (3).